XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2021

1. (3 puntos) Sea $V = \mathbb{R}^{2021}$ y A una matriz cuadrada de tamaño 2021 con entradas reales. Para cada vector $v \in V$ se define la órbita de v como el conjunto $O(v) = \{A^m v : m \in \mathbb{Z}, m \geq 0\}$. Decimos que la órbita de v es periódica si existe un entero $k > 0$ tal que $A^k v = v$. Pruebe que si para un vector w su órbita $O(w)$ es periódica y contiene 2021 vectores linealmente independientes, entonces $O(v)$ es periódica para todo $v \in V$.

   Solución

   Sea k el periodo de w y $S = \{A^{j_1}w, A^{j_2}w, ..., A^{j_{2021}}w\}$, con $j_i \geq 0$, el conjunto de los 2021 vectores linealmente independientes que contiene $O(w)$. Entonces, S es una base de $V = \mathbb{R}^{2021}$. Sea $v \in V$, v se puede escribir como

$$v = \alpha_1 A^{j_1} w + \alpha_2 A^{j_2} w ... + \alpha_{2021} A^{j_{2021}} w, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

   Luego,

$$\begin{aligned} A^k v =& A^k(\alpha_1 A^{j_1} w + \alpha_2 A^{j_2} w \ldots + \alpha_{2021} A^{j_{2021}} w) \\ =& \alpha_1 A^k A^{j_1} w + \alpha_2 A^k A^{j_2} w \ldots + \alpha_{2021} A^k A^{j_{2021}} w \\ =& \alpha_1 A^{j_1} A^k w + \alpha_2 A^{j_2} A^k w \ldots + \alpha_{2021} A^{j_{2021}} A^k w \\ =& \alpha_1 A^{j_1} w + \alpha_2 A^{j_2} w \ldots + \alpha_{2021} A^{j_{2021}} w \\ =& v \end{aligned}$$

   Así, la órbita de todo $v \in V$ es periódica.

2. (4 puntos) ¿Existe un polinomio $P(x)$ no constante con coeficientes reales, tal que para todo entero positivo n el número $P(n)$ sea algún término de la sucesión de Fibonacci?

   Nota: La sucesión de Fibonacci $\{F_1, F_2, \ldots\}$ se define como $F_1 = F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$.

   Solución

   Como la sucesión $P(n)$ toma valores positivos para todo $n \geq 1$ (en particular, cuando n es grande), entonces el coeficiente principal de P debe ser positivo. Como $P(x)$ no es constante, entonces $P'(x)$ es un polinomio no nulo con coeficiente principal positivo. Esto implica que existe un entero positivo N tal que si $x \geq N$, entonces $P'(x) > 0$ y así $P(x)$ es estrictamente creciente y positivo para $x \geq N$.

Por lo tanto, si $n \geq N$ y $P(n) = F_m$, entonces $P(n+1) \geq F_{m+1}$ y $P(n+2) \geq F_{m+2}$. Como la sucesión de Fibonacci es creciente, entonces $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m \geq 2F_m$ y así deducimos que $P(n+2) \geq 2P(n)$, o bien, $P(n+2)/P(n) \geq 2$. Tomando límites cuando $n \to \infty$, obtenemos que $1 \geq 2$, lo cual es una contradicción.

3. (4 puntos) Para todo entero positivo $n > 1$, considere su factorización prima $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, con $\alpha_i > 0$, y defina el producto $p(n) := (p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1)$. Decimos que número n es *significativo* si $p(n)$ y $p(n+1)$ son divisibles entre 42; por ejemplo, 2021 es significativo porque $p(2021) = p(43 \cdot 47) = 42 \cdot 46$ y $p(2022) = p(2 \cdot 3 \cdot 337) = 1 \cdot 2 \cdot 336 = 42 \cdot 16$. Encuentre todos los números *significativos* menores que 500.

Solución

Primero observamos que el número 421 es significativo: 421 es primo (no es divisible por $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$) por lo que $p(421) = 420 = 42 \cdot 10$, y para $422 = 2 \cdot 211$ tenemos que 211 primo (no es divisible por $2, 3, 5, 7, 11, 13$), por lo que $p(422) = 1 \cdot 210 = 42 \cdot 5$. Vamos a demostrar que este es el único número menor que 500 que cumple la condición.

Primero observamos que $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, lo que implica que 42 divide a $p(m)$ si y sólo si m tiene divisores primos de la forma $3k + 1$ y $7k + 1$; puede ser que este divisor primo cumpla las dos propiedades, en cuyo caso sería un divisor primo de la forma $21k + 1$.

Los divisores primos $3k + 1$ y $7k + 1$ son impares (ninguno puede ser igual a 2), por lo que estos tienen que ser de la forma $6k + 1$ y $14k + 1$. Vamos a encontrar los primeros divisores primos para cada uno de estos casos:

$$\begin{aligned} 6k + 1 &: \; 7, 13, 19, 31, 37, 43, \ldots \\ 14k + 1 &: \; 29, 43, 71, 113, 127, \ldots. \end{aligned}$$

Si 42 divide a $p(m)$ y m no tiene divisores primos de la forma $21k + 1$, entonces m tiene que ser divisible por el producto de al menos un número de cada una de las listas de arriba, eliminando los elementos repetidos (entre ellos el 43). Este producto es menor o igual que 500 solo para las siguientes combinaciones:

$$7 \cdot 29 = 203, \quad 13 \cdot 29 = 377, \quad 7 \cdot 71 = 497.$$

Por lo tanto, si n es significativo y alguno de n o $n + 1$ no tiene divisores primos de la forma $21k + 1$, entonces los posibles candidatos para el par $(n, n + 1)$ son

$(202, 203)$, $(203, 204)$, $(376, 377)$, $(377, 378)$, $(405, 406)$, $(406, 407)$, $(496, 497)$, $(497, 498)$.

Sin embargo podemos verificar que ninguno de estos pares funciona, ya que

$$202 = 2 \cdot 101, \quad 204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17, \quad 376 = 2^3 \cdot 47, \quad 378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7,$$

$$405 = 3^4 \cdot 5, \quad 407 = 11 \cdot 37, \quad 496 = 2^4 \cdot 31, \quad 498 = 2 \cdot 3 \cdot 83,$$

y ninguno de los divisores primos que aparecen en estas factorizaciones es de la forma $7k+1$. Por lo tanto, si n es significativo y menor o igual que 500, entonces n y $n+1$ deben tener divisores primos de la forma $21k+1$. Además, como este primo siempre es impar (porque no puede ser 2), entonces debe ser de la forma $42k+1$. Mostramos la lista de los números de la forma $42k+1$ menores que 500:

$$43, \quad 85, \quad 127, \quad 169, \quad 211, \quad 253, \quad 295, \quad 337, \quad 379, \quad 421, \quad 463.$$

Si un número de la forma $42k+1$, menor que 500, es compuesto entonces tiene un factor primo menor o igual $\sqrt{500} < \sqrt{529} = 23$. Dado que $42k+1$ es coprimo con $2, 3, 7$, solo hay que revisar la divisibilidad por 5, 11, 13, 17 y 19, con lo cual descartamos:

$$85 = 5 \cdot 17, \quad 169 = 13^2, \quad 253 = 11 \cdot 23, \quad 295 = 5 \cdot 59.$$

Por lo tanto, si n es significativo, entonces n y $n+1$ son ambos divisibles por alguno de los números primos $\{43, 127, 211, 337, 379, 421, 463\}$. Considerando los múltiplos de 43, 127 y 211 (los otros no tienen múltiplos mayores que sí mismos), obtenemos que n y $n+1$ pertenecen al conjunto

$$\{43,\ 86,\ 129,\ 172,\ 215,\ 258,\ 301,\ 344,\ 387,\ 430,\ 473,\ 127,\ 254,\ 381,\ 211,\ 422,\ 337,\ 379,\ 421,\ 463\}$$
$$= \{43,\ 86,\ 127,\ 129,\ 172,\ 211,\ 215,\ 254,\ 258,\ 301,\ 337,\ 344,\ 379,\ 381,\ 387,\ 421,\ 422,\ 430,\ 463,\ 473\}.$$

El único par de números consecutivos en esta lista es 421 y 422, con lo que concluimos que 421 es el único entero significativo menor o igual que 500.

4. (4 puntos) Sean $a, b > 0$ y defina las elipses

$$\mathcal{E}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \text{ y } \mathcal{E}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4\right\}.$$

Dado un punto A en $\mathcal{E}_2$, sean B y C puntos distintos en $\mathcal{E}_2$ tales que AB y AC son tangentes a $\mathcal{E}_1$. Demuestre que BC también es tangente a $\mathcal{E}_1$ y demuestre que el área del triángulo ABC no depende de la elección del punto A.

Solución

Consideramos la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) \mapsto (x/a, y/b) = (z, w)$. De esta manera, T transforma las elipses $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ en los círculos

$$\mathcal{C}_1 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : z^2 + w^2 = 1\} \text{ y } \mathcal{C}_2 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : z^2 + w^2 = 4\}.$$

Sean $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$. Como la transformación es lineal, entonces $A'B'$ y $A'C'$ son rectas tangentes a $\mathcal{C}_1$. Vamos a demostrar que $B'C'$ es tangente a $\mathcal{C}_1$ y que el triángulo $A'B'C'$ es equilátero.

Sea $O = (0,0)$ el centro de los dos círculos, y sean D y E los puntos de tangencia de $\mathcal{C}_1$ con $A'C'$ y $A'B'$, respectivamente. Entonces $OA' = 2$, $OD' = OE' = 1$ y $\angle OD'A' = \angle OE'A' = 90°$. Por lo tanto,

$$\angle OA'D' = \angle OA'E' = \arcsin\frac{1}{2} = 30°,$$

por lo que $\angle B'A'C' = 60°$ y así $\angle B'OC' = 120°$. Con esto obtenemos que $\angle OB'C' = \angle OC'B' = 30°$. La distancia de O a $B'C'$ es $OB'\sin(OB'C') = 2\sin(30°) = 1$, con lo que concluimos que $B'C'$ también es tangente a $\mathcal{C}_1$. Esto implica que BC es tangente a $\mathcal{E}_1$.

Además, $\angle OB'A' = \angle OA'B' = 30°$, por lo que $\angle A'OB' = 120°$. Análogamente, $\angle A'OC' = 120°$, con lo que concluimos que $\angle B'OC' = \angle A'OB' = \angle C'OA' = 120°$ y por lo tanto el triángulo $A'B'C'$ es equilátero. El área de todos los triángulos equiláteros inscritos en $\mathcal{C}_2$ es la misma y la razón entre las áreas de ABC y $A'B'C'$ es ab (el determinante de T^{-1}), con lo que concluimos que el área del triángulo ABC no depende de la escogencia de A.

Solución alternativa

Dado un punto P en $\mathcal{E}_1$, vamos a encontrar la intersección de $\mathcal{E}_2$ con la recta tangente a $\mathcal{E}_1$ por P. Sea $P = (a\cos\theta, b\sin\theta)$. Entonces la ecuación de la recta tangente es

$$\frac{2a\cos\theta}{a^2}(x - a\cos\theta) + \frac{2b\sin\theta}{b^2}(y - b\sin\theta) = 0 \iff \frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1.$$

Las intersecciones de esta recta con la elipse $\mathcal{E}_2$ cumplen entonces

$$\left(1 - \frac{y\sin\theta}{b}\right)^2 = \frac{x^2\cos^2\theta}{a^2} = \left(4 - \frac{y^2}{b^2}\right)\cos^2\theta \iff \frac{y^2}{b^2} - \frac{2y\sin\theta}{b} + (1 - 4\cos^2\theta) = 0.$$

Usando que $1 - 4\cos^2\theta = \sin^2\theta - 3\cos^2\theta$, concluimos que las soluciones están dadas por

$$y = b(\sin\theta \pm \cos\theta\sqrt{3}) \iff y = 2b\sin(\theta \pm 60°).$$

De manera análoga encontramos que $x = a(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{3}) = 2a\cos(\theta \pm 60°)$. Usando la identidad $\cos\theta\cos(\theta \pm 60°) + \sin\theta\sin(\theta \pm 60°) = \cos(\pm 60°) = 1/2$, podemos concluir que los puntos de intersección de $\mathcal{E}_2$ y la tangente a $\mathcal{E}_1$ por P_1 son $(2a\cos(\theta + 60°), 2b\sin(\theta + 60°))$ y $(2a\cos(\theta - 60°), 2b\sin(\theta - 60°))$. Notemos que hay una diferencia de $60°$ entre el argumento del punto en $\mathcal{E}_1$ y los puntos en $\mathcal{E}_2$, así como una diferencia de $120°$ entre los argumentos de los puntos sobre la elipse $\mathcal{E}_2$.

Con base en la observación anterior, deducimos que si $A = (2a\cos\alpha, 2b\sin\alpha)$, entonces B y C son iguales a $(2a\cos(\alpha + 120°), 2b\sin(\alpha + 120°))$ y $(2a\cos(\alpha + 240°), 2b\sin(\alpha + 240°))$. Usando el cálculo que hicimos antes, vemos que la tangente a $\mathcal{E}_1$ por el punto $D = (a\cos(\alpha + 180°), b\sin(\alpha + 180°))$ interseca a $\mathcal{E}_2$ en B y C; es decir, BC es tangente a $\mathcal{E}_1$ en el punto D.

Finalmente, asumimos sin pérdida de generalidad que $B = (2a\cos(\alpha+120^\circ), 2b\sin(\alpha+120^\circ))$ y $C = (2a\cos(\alpha+240^\circ), 2b\sin(\alpha+240^\circ))$. Si $O = (0,0)$, entonces los triángulos OAB, OBC y OCA están orientados en sentido antihorario y sus áreas son todas iguales a $2ab\sin 120^\circ = ab\sqrt{3}$, con lo que concluye el resultado.

5. (5 puntos) Considere una función $\epsilon : \mathbb{Z}^+ \to \{-1, 1\}$, para la cual existe $0 < \alpha < 1$ tal que $|\epsilon(1) + \ldots + \epsilon(n)| \leq n^\alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestre que si $\beta > \alpha$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon(n)/n^\beta$ converge y está acotada superiormente por $\beta/(\beta-\alpha)$.

Solución

Sea $E(0) = 0$ y $E(n) = \epsilon(1) + \ldots + \epsilon(n)$ para $n \geq 1$, de manera que $E(n) - E(n-1) = \epsilon(n)$ para $n \geq 1$. Consideramos las sumas parciales de la serie y aplicamos sumación por partes:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\epsilon(n)}{n^\beta} = \sum_{n=1}^{N} \frac{E(n) - E(n-1)}{n^\beta} = \frac{E(N)}{N^\beta} - E(0) + \sum_{n=1}^{N-1} E(n)\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right).$$

Observamos que $E(N)/N^\beta \to 0$ cuando $N \to +\infty$, pues $\alpha < \beta$. Para el otro término vamos a demostrar que la serie asociada converge absolutamente. Usando las condiciones del problema, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E(n)|\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right).$$

Por el teorema del valor medio tenemos que existe $\eta \in (n, n+1)$ tal que

$$\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{\beta}{\eta^{\beta+1}} \leq \frac{\beta}{n^{\beta+1}},$$

con lo cual concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta-\alpha+1}} < \infty.$$

Esto demuestra que la serie converge, pero no da la cota que buscamos; en efecto, la cota del problema es más fuerte, pues $1/(s-1) \leq \zeta(s)$ para $s > 1$. Podemos obtener la cota modificando la aplicación del teorema del valor medio: vamos a demostrar que

$$n^\alpha\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right) \leq \frac{\beta}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\beta-\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{\beta-\alpha}}\right).$$

Consideramos las funciones $f(x) = x^{-(\beta-\alpha)}$ y $g(x) = x^{-\beta}$. Por el teorema del valor medio de Cauchy tenemos que existe $\eta \in (n, n+1)$ tal que

$$\frac{f(n) - f(n+1)}{g(n) - g(n+1)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = \frac{-(\beta-\alpha)\eta^{-(\beta-\alpha)-1}}{-\beta\eta^{-\beta-1}} = \frac{\beta-\alpha}{\beta}\eta^\alpha \geq \frac{\beta-\alpha}{\beta}n^\alpha,$$

lo cual implica nuestra afirmación anterior. De esta manera obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^{\beta}}-\frac{1}{(n+1)^{\beta}}\right) \leq \frac{\beta}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\beta-\alpha}}\right)=\frac{\beta}{\beta-\alpha},$$

con lo cual concluimos el resultado.

6. (7 puntos) Sea $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere la familia $F_n(k)$ de las matrices $n \times n$ con entradas complejas A, tales que

   a) Cada entrada de A es 0 o 1.

   b) Hay a lo sumo k filas de A tales que el número de entradas no cero es mayor a k.

   Para una matriz A con entradas complejas sea $f(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } A\}$ y sea $\varphi(n) := \text{máx}\{f(A) : A \in F_n(k)\}$. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}$ existe y determine su valor.

   Nota: Decimos que λ es un valor propio de A, si existe un vector $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$.

   Solución

   Sea $A \in F_n(k)$ una matriz con entradas a_{ij}, y suponga sin perdida de generalidad que toda fila despueś de la k-ésima fila tiene a lo sumo k entradas no cero. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A con autovector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y sea $x = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$. Entonces para $i > k$ tenemos que la entrada i de Ax en valor absoluto es

   $$|\lambda x_i| = |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n| \leq kx, \text{ se sigue que } |x_i| \leq kx/|\lambda|.$$

   Si $x = x_j$, entonces tenemos que la entrada j de Ax en valor absoluto es

   $$|\lambda x| = \left|\sum_{t=1}^{n} a_{jt}x_t\right| \leq \sum_{t=1}^{n} |a_{jt}x_t| = \sum_{t=1}^{k} |a_{jt}x_t| + \sum_{t=k+1}^{n} |a_{jt}x_t| \leq kx + (n-k)kx/\lambda,$$

   de donde se sigue que $|\lambda| \leq k + (n-k)k/|\lambda| \leq k + nk/|\lambda|$. En particular, podemos tomar λ tal que $|\lambda| = \varphi(n)$. Dividiendo por $\sqrt{n}$ y tomando límites obtenemos que

   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \leq k \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}.$$

   Ahora, para $n \geq k$ considere la matriz $A \in F_n(k)$ dada por $A = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = 1$ si $\text{mín}\{i,j\} \leq k$ y 0 en caso contrario. Para $n > k$, considere

   $$\lambda_n = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4k(n-k)}}{2},$$

   una de las raices del polinomio $p(t) = t^2 - tk - k(n-k)$.

   Vemos que λ_n es valor propio de A con autovector asociado $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, donde $v_i = \lambda_n$ si $1 \leq i \leq k$ y $v_i = k$ si $k < i \leq n$, pues la entrada i de Av para $i \leq k$ es

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = k\lambda_n + (n-k)k = \lambda_n^2 = \lambda_n v_i,$$

y para $i > k$ se tiene que la entrada i de Av es

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{k} v_j = k\lambda_n = \lambda_n v_i.$$

De esta forma tenemos que $\varphi(n) \geq \lambda_n$. Como $\lim_{n\to\infty} \lambda_n/\sqrt{n} = \sqrt{k}$, entonces concluimos que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{k}.$$

Combinando esto con una desigualdad anterior obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \leq k \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)} = k\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \leq \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}.$$

Estas últimas desigualdades implican que el límite existe y es igual a $\sqrt{k}$.

7. (7 puntos) Sea n un entero positivo y sean $w_1, \ldots, w_n$ las raíces n-ésimas de la unidad. Denote por C_n el valor máximo de $|a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n|$, donde $a_i \in \{-1, 1\}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Determine el valor de
$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{n}.$$
Nota: Las raíces n-ésimas de la unidad, son los n números complejos que satisfacen la ecuación $z^n = 1$.

Solución

No hay pérdida de generalidad en suponer n par - la diferencia entre el caso n y el caso $n+1$ en las sumas obtenidas es $O(1)$, que tiende a 0 al dividir por n. Escogiendo los a_j para que el módulo de la suma sea máximo, sea v un vector unitario en la dirección de esta suma $a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n$. Entonces a_j debe ser 1 si $\langle w_j, v\rangle > 0$ y -1 si $\langle w_j, v\rangle < 0$. Esto divide los w_j en dos grupos simétricos en que los signos deben ser opuestos, de modo que, a menos de una rotación, en esta situación $a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n = 2\sum_{0\leq j<n/2} e^{2j\pi i/n} = 2(1 - e^{\pi i})/(1 - e^{2\pi i/n}) = 4/(1 - e^{2\pi i/n})$, cuyo mdulo es $4/|1 - e^{2\pi i/n}| = 2/sen(\pi/n)$, que, dividido por n tiende a $2/\pi$, que es el límite deseado.