XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2021

1. (3 puntos) Sea $V = \mathbb{R}^{2021}$ y A una matriz cuadrada de tamaño 2021 con entradas reales. Para cada vector $v \in V$ se define la órbita de v como el conjunto $O(v) = \{A^m v : m \in \mathbb{Z}, m \geq 0\}$. Decimos que la órbita de v es periódica si existe un entero $k > 0$ tal que $A^k v = v$. Pruebe que si para un vector w su órbita $O(w)$ es periódica y contiene 2021 vectores linealmente independientes, entonces $O(v)$ es periódica para todo $v \in V$.

2. (4 puntos) ¿Existe un polinomio $P(x)$ no constante con coeficientes reales, tal que para todo entero positivo n el número $P(n)$ sea algún término de la sucesión de Fibonacci?

   Nota: La sucesión de Fibonacci $\{F_1, F_2, \ldots\}$ se define como $F_1 = F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$.

3. (4 puntos) Para todo entero positivo $n > 1$, considere su factorización prima $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, con $\alpha_i > 0$, y defina el producto $p(n) := (p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1)$. Decimos que número n es *significativo* si $p(n)$ y $p(n+1)$ son divisibles entre 42; por ejemplo, 2021 es significativo porque $p(2021) = p(43 \cdot 47) = 42 \cdot 46$ y $p(2022) = p(2 \cdot 3 \cdot 337) = 1 \cdot 2 \cdot 336 = 42 \cdot 16$. Encuentre todos los números *significativos* menores que 500.

4. (4 puntos) Sean $a, b > 0$ y defina las elipses

   $$\mathcal{E}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \text{ y } \mathcal{E}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4\right\}.$$

   Dado un punto A en $\mathcal{E}_2$, sean B y C puntos distintos en $\mathcal{E}_2$ tales que AB y AC son tangentes a $\mathcal{E}_1$. Demuestre que BC también es tangente a $\mathcal{E}_1$ y demuestre que el área del triángulo ABC no depende de la elección del punto A.

5. (5 puntos) Considere una función $\epsilon : \mathbb{Z}^+ \to \{-1, 1\}$, para la cual existe $0 < \alpha < 1$ tal que $|\epsilon(1) + \ldots + \epsilon(n)| \leq n^\alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestre que si $\beta > \alpha$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon(n)/n^\beta$ converge y está acotada superiormente por $\beta/(\beta - \alpha)$.

6. (7 puntos) Sea $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere la familia $F_n(k)$ de las matrices $n \times n$ con entradas complejas A, tales que

   a) Cada entrada de A es 0 o 1.

   b) Hay a lo sumo k filas de A tales que el número de entradas no cero es mayor a k.

   Para una matriz A con entradas complejas sea $f(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } A\}$ y sea $\varphi(n) := \max\{f(A) : A \in F_n(k)\}$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}$ existe y determine su valor.

   Nota: Decimos que λ es un valor propio de A, si existe un vector $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$.

7. (7 puntos) Sea n un entero positivo y sean $w_1, \ldots, w_n$ las raíces n-ésimas de la unidad. Denote por C_n el valor máximo de $|a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n|$, donde $a_i \in \{-1, 1\}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Determine el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{n}.$$

   Nota: Las raíces n-ésimas de la unidad, son los n números complejos que satisfacen la ecuación $z^n = 1$.